Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 1

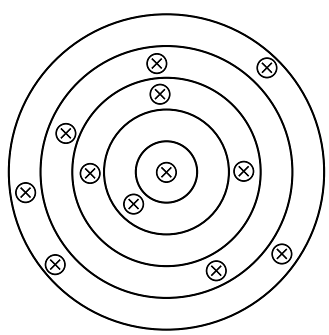
Prof. Bruno Holanda

Aula 2

Jogos e Brincadeiras II

Neste artigo continuaremos o assunto iniciado no material anterior. O primeiro exercício, trata-se de um jogo não-estratégico, que podemos chamar de brincadeira, por não admitir um procedimento independente dos movimentos dos outros jogadores para garantir a vitória de um determinado participante. Os demais jogos analisados no texto, em que as jogadas são tomadas em turnos, admitem tal procedimento e por isso serão chamados de jogos estratégicos.

Problema 1. Quatro garotos jogam tiro ao alvo. Cada um deles atirou três vezes. No alvo abaixo, pode-se ver os lugares atingidos. A pontuação é 6 para o centro e diminui um ponto para cada nível mais distante. Se os quatro garotos empataram, determine:



(a) a pontuação total de cada jogador.

(b) a pontuação dos três tiros de cada jogador.

Solução. A soma de todos os pontos obtidos foi $6 + 5 + 4 \times 3 + 3 \times 3 + 2 \times 4 = 40$. Como todos empataram, cada um deve ter feito exatamente 10 pontos (resposta para o item (a)). Além disso, é importante perceber que ninguém errou nenhum dos tiros, já que há exatamente 12 dardos no alvo. Note que um dos jogadores (digamos A) acertou um dos dardos no centro do alvo, fazendo 6 pontos. Para completar os 10 pontos ele deve ter feito mais 4 pontos. Como é impossível fazer apenas 1 ponto, ou dele ter errado, só nos resta a possibilidade dele ter feito 2 pontos nos dois outros tiros. Veja também que um dos jogadores fez 5 pontos. Para completar os outros cinco pontos, deve ter necessariamente acertado 2 e 3 pontos nas suas outras duas jogadas. Um terceiro jogador acertou 4 pontos. Para completar os 10 pontos totais, ele pode ter acertado (4 e 2) ou (3 e 3). Enquanto que o quarto jogador ficará com as marcações restantes. Dessa forma, podemos resumir as pontuções na triplas a seguir: $(6,2,2)$ $(5,3,2)$ $(4,4,2)$ $(4,3,3)$ □

Problema 2. (OBM 2015 - 3a Fase) Ana e Beatriz possuem muitas moedas. Elas colocam várias sobre uma mesa e jogam de acordo com as seguintes regras:

i. o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas;

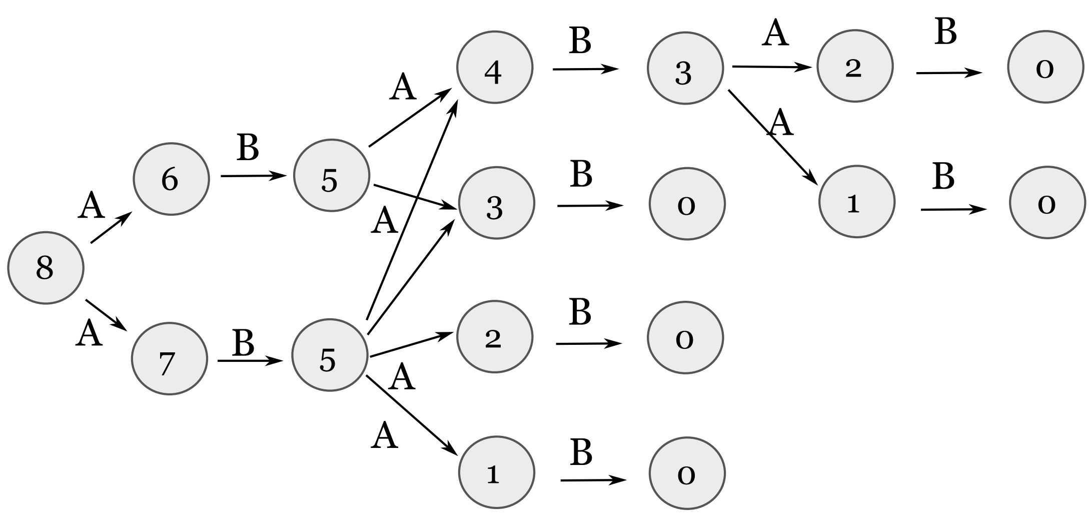
ii. quem jogar a seguir pode retirar no mínimo uma moeda e no máximo o dobro do número de moedas que o jogador anterior retirou;

iii. ganha quem retirar a última moeda.

a) Suponha que elas coloquem 11 moedas sobre a mesa. Se Ana for a primeira a jogar e retirar duas moedas, mostre como Beatriz pode vencer o jogo (não importando quais sejam as demais jogadas de Ana).

b) Agora suponha que elas coloquem 15 moedas sobre a mesa. Mostre como a primeira a jogar pode vencer o jogo sempre (não importando quais sejam as jogadas da segunda).

Solução. a) Para Beatriz vencer, deve seguir a seguinte estratégia:



1. Primeiro deve retirar uma moedas, deixando a mesa com oito moedas.

2. Na vez de Ana, ela poderá retirar 1 ou 2 moedas. Deixando a mesa com 7 ou 6 moedas.

3. Neste caso, Beatriz sempre poderá deixar a mesa com 5 moedas.

4. Veja que neste ponto, Ana não poderá vencer o jogo. De fato, ela pode retirar no máximo quatro moedas. Caso ela retire duas ou mais moedas, Beatriz vence retirando todas as moedas que sobrarem. Caso Ana retire apenas uma moeda, Beatriz deverá retirar mais outra, deixando a mesa com apenas três moedas.

5. Dessa forma, Ana só poderá retirar uma ou duas moedas, e em cada um destes casos, Beatriz poderá vencer retirando todas as moedas que sobrarem.

A figura anterior resume a estratégia que Beatriz deve adotar.

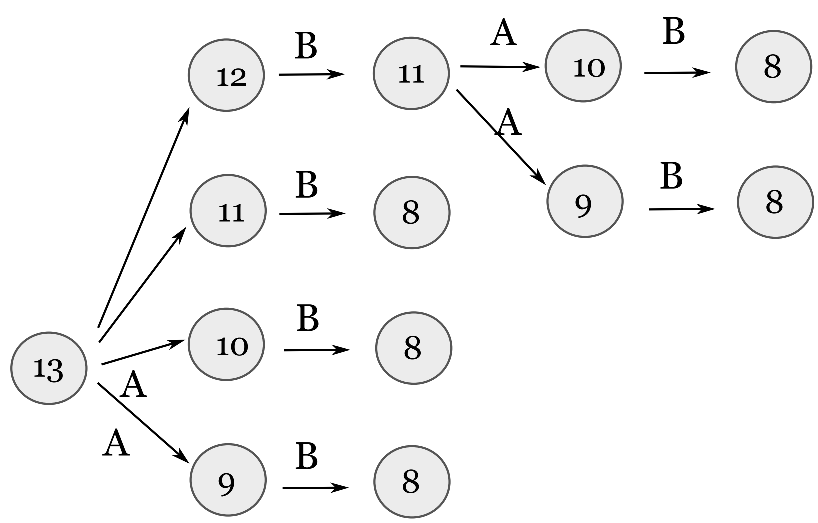
b) Suponha que Beatriz é a primeira a jogar. Vamos mostrar que ela sempre pode vencer, independente das jogadas escolhidas por Ana. Basta que ela siga a seguinte estratégia:

1. O primeiro passo é retirar duas moedas deixando 13 moedas para Ana. Se Ana retirar, em sua jogada, cinco ou mais moedas, Beatriz poderá vencer retirando todas as moedas restantes em sua próxima jogada.

2. Caso Ana retire duas, três ou quatro moedas, Beatriz deve retirar uma quantidade suficiente de moedas para entregar oito moedas para Ana. Se, em sua jogada, Ana retirar uma ou duas moedas, Beatriz deve prosseguir com a mesma estratégia mencionada no item (a) deste exercício. Caso Ana retire três ou mais moedas, Beatriz vence retirando as moedas restantes.

3. Se Ana retirar uma moeda na rodada anterior, deixando 12 moedas na mesa, Beatriz deve retirar apenas uma moeda, deixando 11 na mesa. Dessa forma, Ana só poderá retirar uma ou duas moedas. Em qualquer caso, Beatriz poderá retirar uma quantidade suficiente de moedas para deixar a mesa com exatamente oito moedas. Reduzindo à estratégia do ponto anterior.

A figura a seguir resume a estratégia que Beatriz deve adotar. □

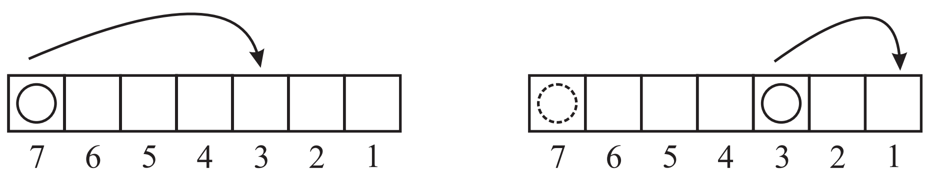


Alguns tipos de jogos possuem certas configurações que sempre levam um jogador à vitória. Essas configurações são chamadas de posições vencedoras. O próximo exemplo é um jogo bastante simples em que essa estratégia aparece facilmente.

Problema 3. Na primeira casa de um tabuleiro 1×13 está uma moeda. Tiago e Maria movem a moeda alternadamente. Em cada turno é permitido avançar $1, 2, 3, 4$ ou 5 casas. Quem colocar a moeda na última casa é o vencedor. Se Maria começar jogando, ela pode ter certeza da vitória?

Solução. Como em muitos problemas de olimpíada, vamos analisar alguns casos pequenos. Vamos supor que em vez de 13 casas o tabuleiro tivesse apenas quatro. Neste caso, fica fácil ver que quem começa ganha basta avançar três casas.

O mesmo iria ocorrer se o tabuleiro tivesse $2, 3, 4, 5$ ou 6 casas. Porém, em um tabuleiro 7×1 o primeiro jogador perde. Veja que após a primeira jogada a moeda estará em uma das casas $2, 3, 4, 5$ ou 6. E já sabemos que essas casas levam o jogador à vitória.



Desse modo, vamos dizer que 7 é uma posição perdedora e $6, 5, 4, 3$ e 2 são posições vencedoras. Assim, se um o jogador estiver em uma das casas $8, 9, 10, 11$ ou 12, ele pode garantir a vitória movendo a moeda para a casa 7, deixando o seu adversário em uma posição perdedora. Com isso, podemos afirmar que as posições $8, 9, 10, 11$ e 12 também são posições vencedoras.

Resta analisar a 13ª casa. Observe que a partir desta casa podemos mover a moeda apenas para uma das casas $8, 9, 10, 11$ ou 12 que são vencedoras. Daí, quem começar perde pelo simples fato de iniciar em uma posição perdedora. $\square$

A grande dificuldade para a maioria dos alunos é descobrir quais são as posições vencedoras de um jogo. Para evitar esse tipo de problema, tenha sempre em mente as seguintes definições:

> **(a)** Posição perdedora: A partir dela, para qualquer movimento realizado, o oponente poderá adotar uma estratégia que garanta sua vitória.
> **(b)** Posição vencedora: A partir dela, podemos escolher um movimento e repassar uma posição perdedora para o oponente.

E como fazer para descobrir quais são as posições vencedoras e perdedoras? A melhor maneira de se fazer isto é analisando o final do jogo e aplicar as definições acima. Vamos praticar um pouco resolvendo o próximo problema.

Problema 4. Em um tabuleiro 8×8, uma torre está na casa $a1$. Dois jogadores a movimentam com objetivo de colocá-la na casa $h8$. Sabendo que a torre pode mover-se apenas para cima ou para direita (quantas casas o jogador desejar) e que não se pode passar a vez, determine qual jogador tem a estratégia vencedora.

Solução. Primeiramente note que todas as casas da última linha e da última coluna (exceto a $h8$) são vencedoras pois, a partir delas *podemos escolher* um movimento que nos leve à vitória. Com, isso a casa $g7$ se torna perdedora pois, a partir dela *qualquer movimento* leva o outro jogador a uma posição vencedora (veja a figura 1).

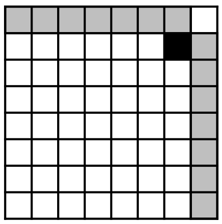


Figura 1

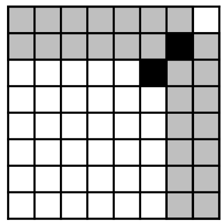


Figura 2

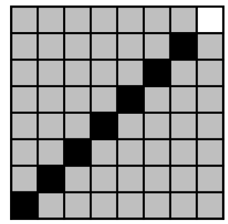


Figura 3

Agora, como $g7$ é perdedora, as demais casas da sétima linha e da sétima coluna são vencedoras. Mais ainda, a casa $f6$ também deve ser perdedora (figura 2). Continuando de maneira análoga, obtemos que a casa $a1$ é perdedora (figura 3). Logo, quem começar, perde. $\square$

Problemas Propostos

Problema 5. Sob uma mesa estão 38 moedas. Alberto e Biaca jogam em turnos. Em cada turno é permitido retirar $1, 2, 3$ ou 4 moedas. Quem retirar as últimas moedas é o vencedor. Se Bianca começar jogando, ela pode ter certeza da vitória?

Problema 6. Uma pilha de 500 pedras é dada. Dois jogadores jogam o seguinte jogo: Em cada turno, o jogador pode retirar $1, 2, 4, 8, ...$ (qualquer potência de 2) pedras da pilha. O jogador que não puder mais jogar perde.

Problema 7. Em uma caixa existem 300 bolinhas. Cada jogador pode retirar não mais do que a metade das bolinhas que estão na caixa. O jogador que não puder mais jogar perde.

Problema 8. Sobre uma mesa existem duas pilhas (uma com 7 e outra com 15 pedras). Em um jogo cada jogador pode, em sua vez, retirar qualquer quantidade de pedras de apenas uma pilha ou a mesma quantidade de ambas as pinhas. Quem não puder mais jogar perde. Quem possui a estratégia vencedora?

Bibliografia Recomendada

Muitos dos exercícios propostos nesta aula foram retirados dos livros:

1. **Mathematical Circles: Russian Experience (Mathematical World, Vol. 7)**. Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia V. Itenberg.

2. **Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991 (Contests in Mathematics Series ; Vol. 1)**. Dmitry Fomin, Alexey Kirichenko.

Outra fonte de problemas são as páginas da Olimpiada Brasileira de Matemática (`www.obm.org.br`) e da Olimpiada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (`www.obmep.org.br`).

Dicas e Soluções

5. Este jogo é muito similar ao jogo proposto no problema 3 deste material. Veja que os múltiplos de 5 são posições perdedoras. Neste caso, Bianca vence retirando três moedas. E toda vez que Carlos retirar x moedas, Bianca deve retirar $5 - x$ moedas em seu turno.

6. Pense nos múltiplos de 3 (são as posições perdedoras). Lembre-se que nenhuma potência de 2 é múltiplo de 3.

7. Pense nas potências de 2.

8. Novamente, use a idéia do tabuleiro que foi usada para resolver o problema 4. Mais precisamente, pense no jogo como um tabuleiro 8×16 com uma peça no canto inferior esquerdo. Retirar uma quantidade x de moedas da primeira pilha corresponderá mover a peça x casas para cima na vertical. Retirar uma quantidade y de moedas da segunda pilha corresponderá mover a peça y casas para a direita na horizontal. Retirar uma quantidade z de moedas das duas pilhas corresponderá mover a peça z casas para cima e z casas para a direita na diagonal. Dessa forma, o objetivo do jogo passa a ser chegar na casa do canto superior direito do tabuleiro.